第一节 质点运动的描述（2）

1. 已知加速度：$a=6t$ 和初始条件：$t=0$ 时，$x_0=10$，$v_0=0$，求 $t=5\text{s}$ 时质点的位置 x。

$$a=\frac{dv}{dt}=6t \quad\Rightarrow\quad dv=6tdt \quad\Rightarrow\quad \int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t 6tdt \quad\Rightarrow\quad v-v_0=3t^2\text{, 其中 } v_0=0\text{，}$$

速度与时间的关系：$v=3t^2$，

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2 \quad\Rightarrow\quad dx=3t^2dt \quad\Rightarrow\quad \int_{x_0}^{x}dx=\int_0^5 3t^2dt \quad\Rightarrow\quad x-x_0=5^3=125\text{，其中 } x_0=10\text{，}$$

则 $t=5\text{s}$ 时质点的位置：$x=135\text{m}$.

2. 已知加速度：$a=Ct^2$ 和初始条件：x_0，v_0，求速度和运动方程。

$$a=\frac{dv}{dt}=Ct^2 \quad\Rightarrow\quad dv=Ct^2dt \quad\Rightarrow\quad \int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t Ct^2dt \quad\Rightarrow\quad v-v_0=\frac{1}{3}Ct^3\text{，}$$

速度与时间的关系：$v=v_0+\frac{1}{3}Ct^3$，

$$v=\frac{dx}{dt}=v_0+\frac{1}{3}Ct^3 \Rightarrow dx=(v_0+\frac{1}{3}Ct^3)dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t(v_0+\frac{1}{3}Ct^3)dt \Rightarrow x-x_0=v_0t+\frac{1}{12}Ct^4\text{，}$$

运动方程：$x=x_0+v_0t+\frac{1}{12}Ct^4$.

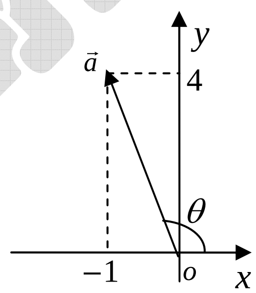
3. 已知运动方程：$\vec{r}=(5+2t-\frac{1}{2}t^2)\vec{i}+(4t+\frac{1}{3}t^3)\vec{j}$，

速度：$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=(2-t)\vec{i}+(4+t^2)\vec{j}$，

加速度：$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=-\vec{i}+2t\vec{j}$，

$t=2\text{s}$ 时，$\vec{a}=-\vec{i}+4\vec{j}\ (\text{m/s}^2)$，

则加速度大小：$a=|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}\ (\text{m/s}^2)$，



（第 3 题图）

由图：$\tan\theta=\frac{4}{-1}=-4$，$\theta=\arctan(-4)=1.81(\text{rad})=104.8^\circ$，$\Rightarrow$ 与 x 轴的夹角为：$1.81(\text{rad})$ 或 104.8°.

4. （A）质点沿 x 轴运动（正方向或负方向），加速度 $a<0$，表示加速度方向沿 x 轴负方向。若质点开始时沿 x 轴负方向运动，在该加速度作用下，将做加速运动。

（B）质点做曲线运动，速度方向必定变化，速度改变量 $\Delta\vec{v}$ 指向曲线凹的一侧，则加速度必指向曲线凹的一侧，加速度必定不为零。

（C）质点做抛体运动时受到重力作用，加速度 $\vec{a}=\vec{g}$ 保持不变；虽然 a_t 和 a_n 不断变化，但总加速度的大小

$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=g$ 不变。

（D）加速度为恒矢量时，若初速度方向与加速度方向不同，质点将做匀变速曲线运动。

5. 已知速度：$v=v_0e^{-kt}$ 和初始条件：$t=0$ 时，$x_0=0$，求运动方程。

$$\text{由}\quad v=\frac{dx}{dt}=v_0e^{-kt} \quad\Rightarrow\quad dx=v_0e^{-kt}dt \quad\Rightarrow\quad \int_0^x dx=\int_0^t v_0e^{-kt}dt \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{v_0}{k}(e^{-kt}-1)\text{，}$$

运动方程：$x=\frac{v_0}{k}(1-e^{-kt})$.

6. 一维运动中，速度：$v=\dfrac{dx}{dt}$ $\Rightarrow$ $\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t vdt$ $\Rightarrow$ 位移：$\Delta x=x-x_0=\int_0^t vdt$，根据积分的几何意义，位移与 $v-t$ 曲线和 t 轴所包围的面积有关，并且曲线在 t 轴上方部分，由于 $v>0$，积分为正；曲线在 t 轴下方部分，由于 $v<0$，积分为负；即位移可用 $v-t$ 曲线与 t 轴所包围的面积的**代数和**（有正、有负）表示；同理，速率：$|v|=\dfrac{ds}{dt}$ $\Rightarrow$ $\int_{s_0}^{s}ds=\int_0^t|v|dt$ $\Rightarrow$ 路程：$\Delta s=\int_0^t|v|dt$，不论曲线在 t 轴上方或下方，**积分都为正**，即路程可用 $v-t$ 曲线和 t 轴所包围的面积**绝对值**（都为正）之和表示；所以选项（A）错，**选项（B）对**。又一维运动中，加速度：$a=\dfrac{dv}{dt}$，根据导数的几何意义，$v-t$ 曲线上各点切线的斜率等于该点的加速度，所以在 $0\sim t_1$ 时间内加速度大于零（斜率为正）；在 $t_1\sim t_3$ 时间内加速度小于零（斜率为负）；在 t_1 时刻加速度等于零（斜率为零）。 本题选（B）

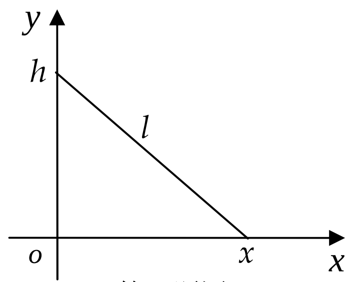
7. 已知加速度：$a=2+6x^2$ 和初始条件：$x_0=0$ 时，$v_0=10$，求速度 v 和位置 x 的关系式。

$$a=\frac{dv}{dt}=2+6x^2 \Rightarrow \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=2+6x^2 \Rightarrow v\frac{dv}{dx}=2+6x^2 \Rightarrow vdv=(2+6x^2)dx$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v}vdv=\int_0^x(2+6x^2)dx \Rightarrow \frac{1}{2}(v^2-v_0^2)=2x+2x^3 \Rightarrow v^2=100+4x+4x^3,$$

速度 v 和位置 x 的关系式：$v=\sqrt{100+4x+4x^3}$.

8. 如图，建立直角坐标系，船的位置矢量：$\vec{r}=x\vec{i}$，速度：$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\dfrac{dx}{dt}\vec{i}$，加速度：$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}\vec{i}$；



（第 8 题图）

由题可知：$x^2+h^2=l^2$，

其中岸高 h 保持不变，$\dfrac{dh}{dt}=0$；绳长 l 在减少，$\dfrac{dl}{dt}<0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{dl}{dt}=-v_0$；

对式 $x^2+h^2=l^2$ 两边求时间导数，得

$$2x\frac{dx}{dt}+0=2l\frac{dl}{dt} \Rightarrow x\frac{dx}{dt}=l(-v_0) \Rightarrow \frac{dx}{dt}=-\frac{l}{x}v_0;$$

对式 $x\dfrac{dx}{dt}=l(-v_0)$ 两边再求时间导数，得

$$\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt}+x\frac{d^2x}{dt^2}=-v_0\frac{dl}{dt} \Rightarrow (-\frac{l}{x}v_0)(-\frac{l}{x}v_0)+x\frac{d^2x}{dt^2}=-v_0(-v_0) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{x}(v_0^2-\frac{l^2}{x^2}v_0^2)=-\frac{h^2}{x^3}v_0^2;$$

所以当船离岸为 S，即 $x=S$ 时，船的速度：$\vec{v}=-\dfrac{l}{S}v_0\vec{i}=-\dfrac{\sqrt{h^2+S^2}}{S}v_0\vec{i}$，速度大小：$v=\dfrac{\sqrt{h^2+S^2}}{S}v_0$；

加速度：$\vec{a}=-\dfrac{h^2}{S^3}v_0^2\vec{i}$，加速度大小：$a=\dfrac{h^2}{S^3}v_0^2$.

9. 已知加速度：$a=4+3t$ 和初始条件：$t=0$ 时，$x_0=5$，$v_0=0$，求 $t=10$ 时的速度 v 和位置 x .

$$a=\frac{dv}{dt}=4+3t \Rightarrow dv=(4+3t)dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t(4+3t)dt \Rightarrow v-v_0=4t+\frac{3}{2}t^2,$$

速度与时间的关系：$v=4t+\dfrac{3}{2}t^2$，

$$v=\frac{dx}{dt}=4t+\frac{3}{2}t^2 \Rightarrow \ dx=(4t+\frac{3}{2}t^2)dt \ \Rightarrow \ \int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t(4t+\frac{3}{2}t^2)dt \ \Rightarrow \ x-x_0=2t^2+\frac{1}{2}t^3,$$

位置与时间的关系：$x=5+2t^2+\frac{1}{2}t^3$，

当$t=10\text{s}$时，速度：$v=40+\frac{3}{2}\times 100=190\,\text{m/s}$，位置：$x=5+2\times 100+\frac{1}{2}\times 1000=705\text{m}$.

10. 斜抛运动过程中加速度大小：$a=g$，方向竖直向下；速度分量：$\begin{cases} v_x=v_0\cos\theta \\ v_y=v_0\sin\theta-gt \end{cases}$，

① 速度大小（速率）：$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(v_0\cos\theta)^2+(v_0\sin\theta-gt)^2}$，

② 切向加速度：$a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{-g(v_0\sin\theta-gt)}{\sqrt{(v_0\cos\theta)^2+(v_0\sin\theta-gt)^2}}$，

③ 法向加速度：$a_n=\sqrt{g^2-a_t^2}=\frac{gv_0\cos\theta}{\sqrt{(v_0\cos\theta)^2+(v_0\sin\theta-gt)^2}}$，

又由法向加速度：$a_n=\frac{v^2}{R}$ $\Rightarrow$ 曲率半径：$R=\frac{v^2}{a_n}=\frac{[(v_0\cos\theta)^2+(v_0\sin\theta-gt)^2]^{\frac{3}{2}}}{gv_0\cos\theta}$，

（1）球在轨道最高点处，$v_y=v_0\sin\theta-gt=0 \ \Rightarrow \ t_1=\frac{v_0\sin\theta}{g}$ $\Rightarrow$曲率半径：$R_1=\frac{(v_0\cos\theta)^2}{g}=10\text{m}$；

（2）球在落地处，$v_y=v_0\sin\theta-gt=-v_0\sin\theta \ \Rightarrow \ t_2=\frac{2v_0\sin\theta}{g}$ $\Rightarrow$曲率半径：$R_2=\frac{v_0^2}{g\cos\theta}=80\text{m}$.

